回転トーラスにおけるヴィラルソーの円
-作図とパラメータ表記-

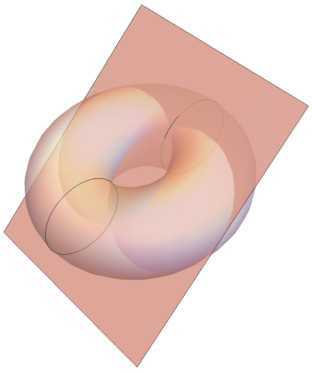
青山学院高等部　青木　収

概要

高等学校の参考教材として，ヴィラルソーの円 ($\mathcal{L} \pm \mathcal{M}$ 型の円族）の作図について AT[1] において示されている方法に基づき再整理してみた．なお，手計算で計算するには少々苦労するが，座標変換や逆行列の計算等のよい練習になる．

目次

1　ヴィラルソーの円とは



（図 0）
$\mathcal{M}$ 型断面円に対する 2 重接平面で切ったときにあらわれる円がヴィラルソーの円である．2 系存在することが分かる（図 1）．
つまり，トーラス面上の任意の 1 点を通る曲面上の円は 4 つある．
*$\mathcal{M}$ 型 1 つ・$\mathcal{L}$ 型 1 つ・$\mathcal{L} \pm \mathcal{M}$ 型 2 つ（図 2）

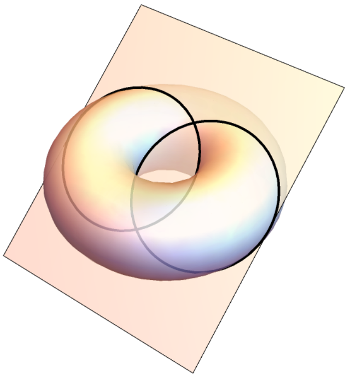


図 1: 2 系のヴィラルソーの円

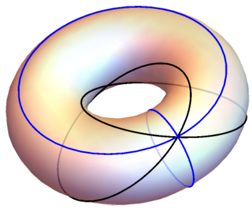


図 2: 曲面上の任意 1 点を通る 4 つの円

2　ヴィラルソーの円を作図する

回転トーラスの $\mathcal{M}$ 型パラメータ表記は, $\left\{ \left(\sqrt{a^2+c^2}+a\cos(v)\right) cos(u),\ \left(\sqrt{a^2+c^2}+a\cos(v)\right) sin(u), a\sin(v)\right\}$ である (図 3)．かつ陰関数は　$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(2a^2+c^2\right)x^2-2\left(2a^2+c^2\right)y^2-2\left(-c^2\right)z^2+c^4=0$
変形して，　$\left(x^2+y^2+z^2-c^2\right)^2-4\left(a^2x^2+a^2y^2-c^2z^2\right)=0$　となる．
なお，トーラス面上の内側で接する 2 次錐面の方程式は，（図 3）の直線の方程式 $z=\dfrac{a}{c}x$ を z 軸周りに回転させて $a^2x^2+a^2y^2-c^2z^2=0$ である．

ここで，一葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の母線 $\{a\cos(u), a\sin(u), 0\}+v\{a\sin(u), -a\cos(u), c\}$ に垂直で原点を通る平面は $ax\sin(u)-ay\cos(u)+cz=0$ である．実はこの平面の包絡曲面が先ほどの 2 次錐面 $a^2x^2+a^2y^2-c^2z^2=0$ になっている．さらに，ヴィラルソーの円はこの平面上に乗っていて，中心が，$\pm\{a\cos(u), a\sin(u), 0\}$，半径が $\sqrt{a^2+c^2}$ であることが分かっている（図 4）．

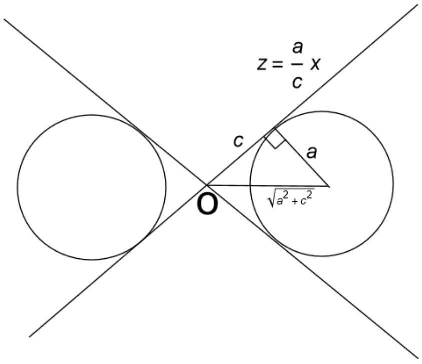


図 3: xz 平面における断面（$\mathcal{M}$ 型があらわれる）（図 0 参考）

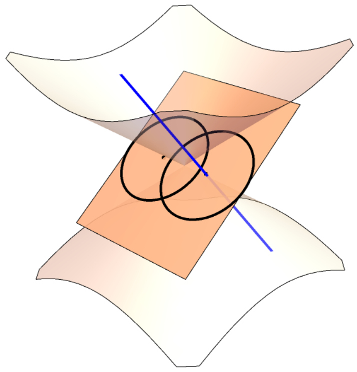


図 4: 平面上のヴィラルソーの円（2 系）
*直線は一葉双曲面の母線

つまり，母線の方向ベクトル（平面の法線ベクトル）方向を x 軸方向にとる座標変換を用いて，ヴィラルソーの円は算出できることになる．

3　ヴィラルソーの円のパラメータ表記

一葉双曲面の 母線の方向ベクトル（平面の法線ベクトル）は $\{a\sin(u), -a\cos(u), c\}$ であるから，
座標変換を表す行列は

$$A = \begin{pmatrix} \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ -\cos(u) & \sin(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & 0 & -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$$ となり，A^{-1} を用いて

中心 $\pm\{a\cos(u), a\sin(u), 0\}$ は $(0, \pm a, 0)$ に変換される．半径は $\sqrt{a^2+c^2}$ なので，新座標におけるヴィラルソーの円のパラメータ表記は
$\left\{0, \sqrt{a^2+c^2}\cos(v)+a, \sqrt{a^2+c^2}\sin(v)\right\}$，$\left\{0, \sqrt{a^2+c^2}\cos(v)-a, \sqrt{a^2+c^2}\sin(v)\right\}$

これらを A で元座標へ戻せば，2 系のヴィラルソーの円のパラメータ表記が次のように得られる．

$$\left\{\cos(u)\left(\sqrt{a^2+c^2}\cos(v)+a\right) - c\sin(u)\sin(v), \sin(u)\left(\sqrt{a^2+c^2}\cos(v)+a\right) + c\cos(u)\sin(v), a\sin(v)\right\}$$
$$\left\{\cos(u)\left(\sqrt{a^2+c^2}\cos(v)-a\right) - c\sin(u)\sin(v), \sin(u)\left(\sqrt{a^2+c^2}\cos(v)-a\right) + c\cos(u)\sin(v), a\sin(v)\right\}$$

なお，v の範囲は $0 \leqq v \leqq 2\pi$ であり，u はそれぞれの系で独立に $0 \leqq u \leqq 2\pi$ の範囲動くものとする．

4　例

　陰関数　$\left(x^2+y^2+z^2-4^2\right)^2-4\left(3^2x^2+3^2y^2-4^2z^2\right)=0$ について
一葉双曲面の母線の方向ベクトル（平面の法線ベクトル）は $\{3\sin(u),-3\cos(u),4\}$ であるから，
座標変換を表す行列は

$A=\begin{pmatrix}\sin(u) & \cos(u) & 0\\ -\cos(u) & \sin(u) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ となり，A^{-1} を用いて

中心 $\pm\{3\cos(u),3\sin(u),0\}$ は $(0,\pm3,0)$ に変換される．半径は $\sqrt{3^2+4^2}=5$ なので，新座標における
ヴィラルソーの円のパラメータ表記は
$\{0,5\cos(v)+3,5\sin(v)\}$，$\{0,5\cos(v)-3,5\sin(v)\}$

これらを A で元座標へ戻せば，2 系のヴィラルソーの円のパラメータ表記が次のように得られる．

$\{\cos(u)\,(5\cos(v)+3)-4\sin(u)\sin(v),\sin(u)\,(5\cos(v)+3)+4\cos(u)\sin(v),3\sin(v)\}$
$\{\cos(u)\,(5\cos(v)-3)-4\sin(u)\sin(v),\sin(u)\,(5\cos(v)-3)+4\cos(u)\sin(v),3\sin(v)\}$

なお，v の範囲は $0\leqq v\leqq 2\pi$ であり，u はそれぞれの系で独立に $0\leqq u\leqq 2\pi$ の範囲を動くものとする．

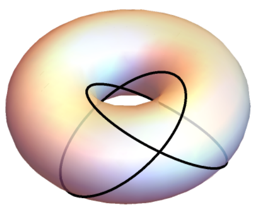


図 5: 例 : 2 系のヴィラルソーの円

5　まとめ

　ヴィラルソーの円のポイントは，一葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の母線である．この母線に着目することで全体の構図が掴める．なお，AT[1] によれば，回転トーラスをさらに一般化したブラム曲面における 2 系の $\mathcal{L}\pm\mathcal{M}$ 円族においても，この回転トーラスと同様にしてパラメータを得ることができる．(図 6 参照)

また，陰関数表記　$\left(x^2+y^2+z^2-c^2\right)^2-4\left(a^2x^2+a^2y^2-c^2z^2\right)=0$　は分かりやすい．球面と 2 次錐面で表記されている．$\mathcal{M}$ 型のパラメータ表記から陰関数への書き換えはこれを覚えておくとよいと思う．

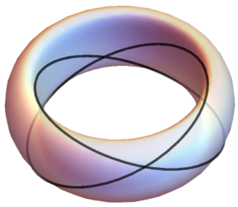


図 6: 例：一般化した回転トーラス面の 2 系のヴィラルソーの円

AT[1] Aoki O. and Takeuchi N., *Geometric Constructions of Blum Surfaces which Contain Six Circles through Each Point.* 東京学芸大学紀要. 自然科学系 Vol.68 p.1 -11